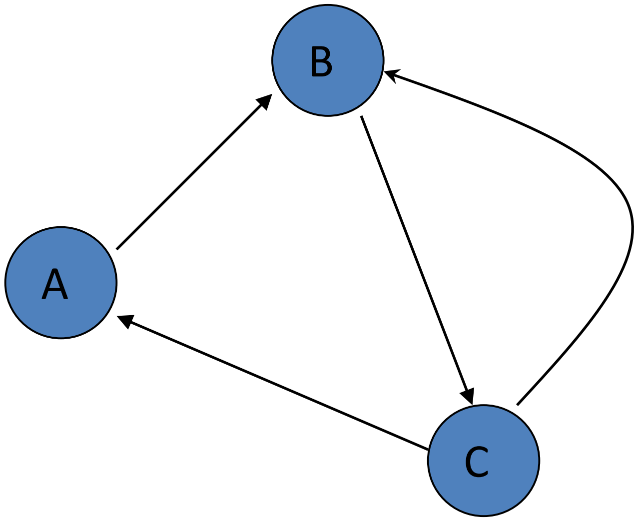
Markova ķēdes un kvantu klejošana

Students: Agnis Āriņš aa07048
Darba vadītājs: profesors Andris Ambainis

Rīga, 2014. gada 8. oktobris

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Orientēts vienkāršs grafs



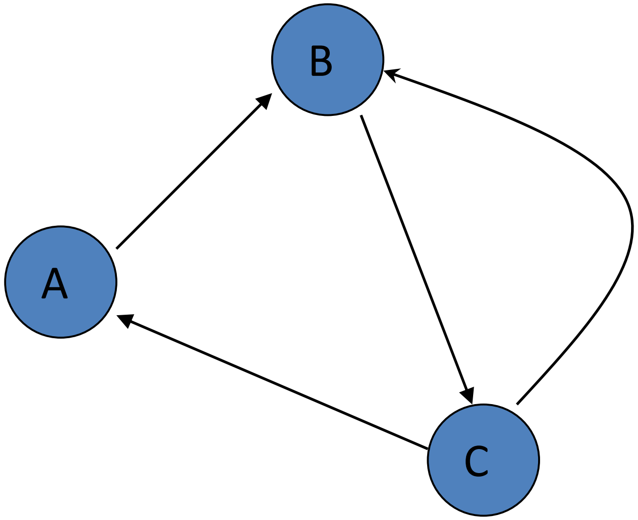
Saistību matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Markova ķēdes

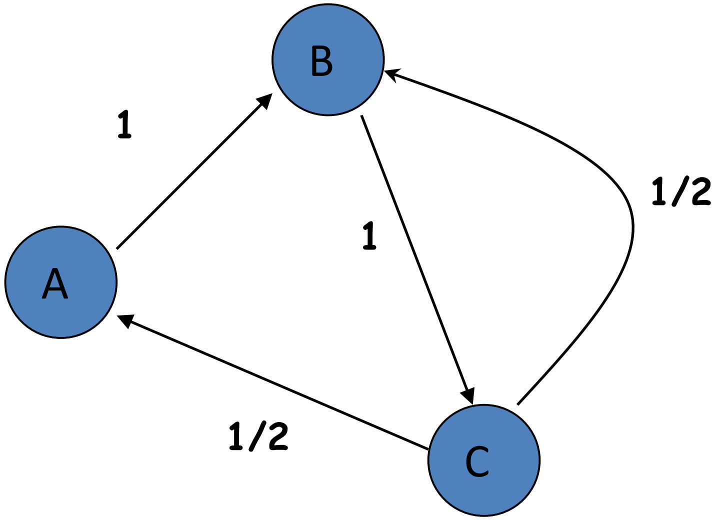
Saistību matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

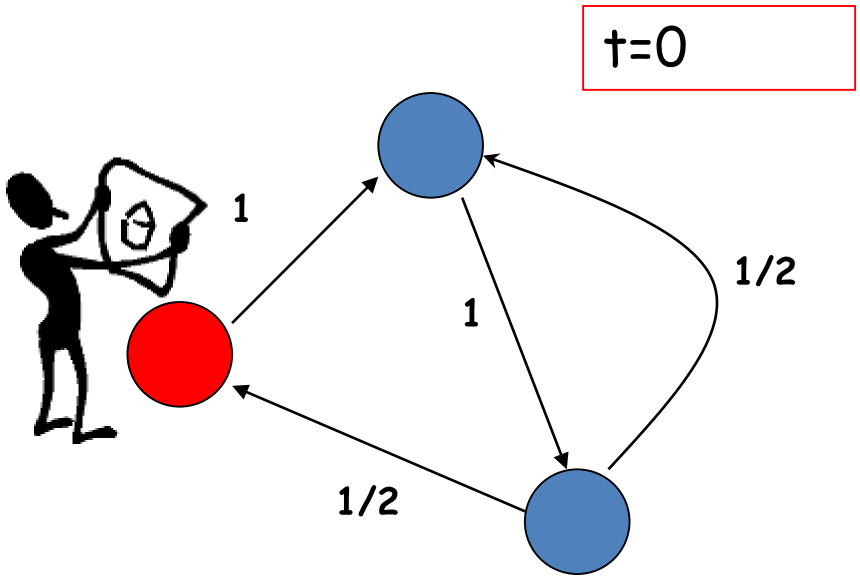


Markova ķēde:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

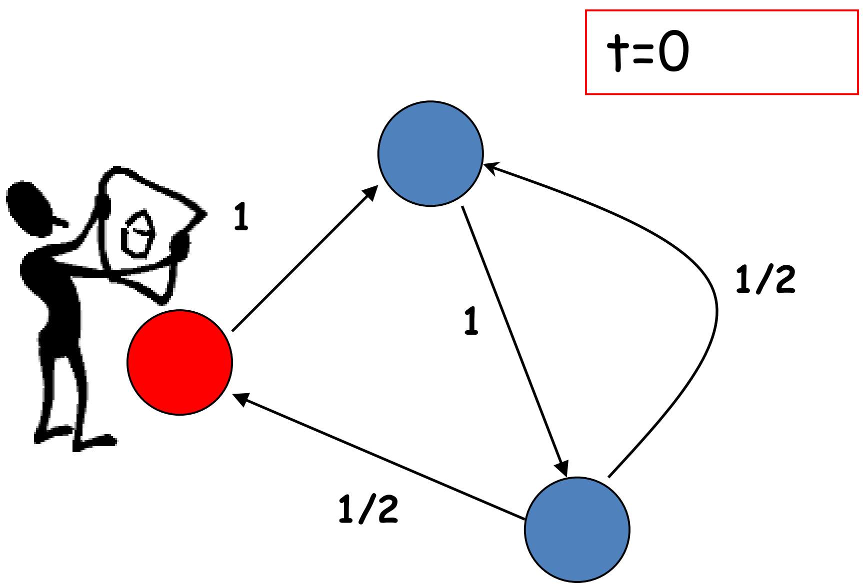


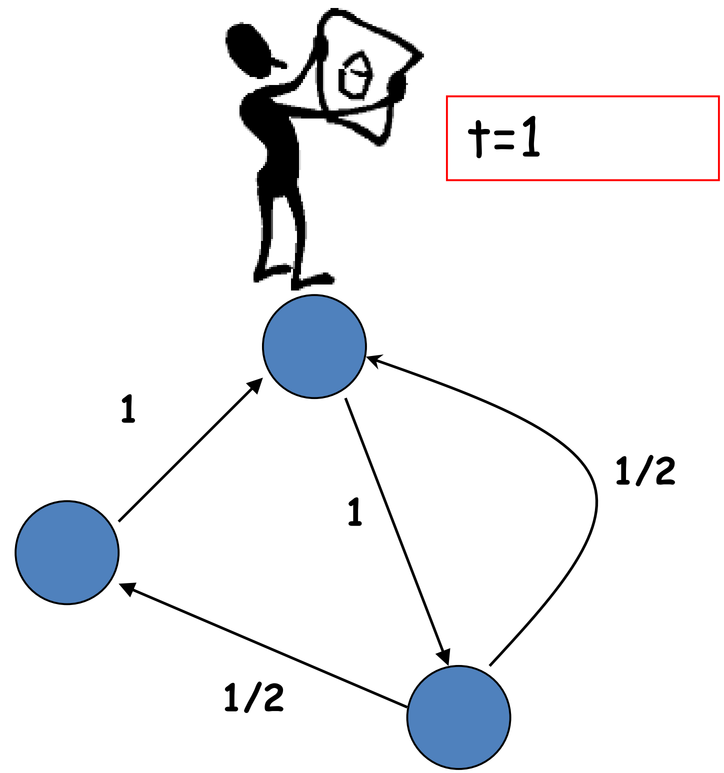
Gadījuma klejošana



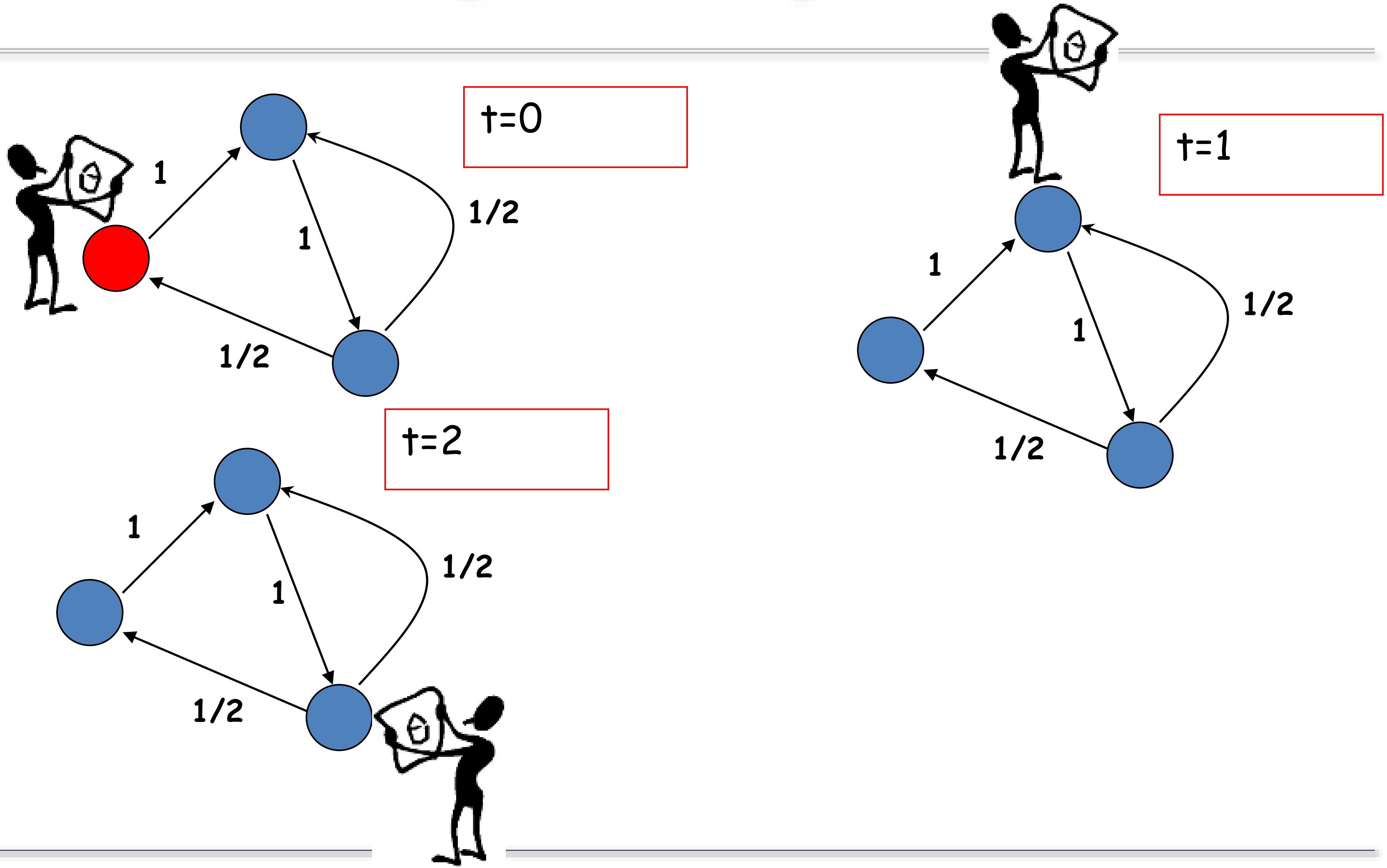
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Gadījuma klejošana

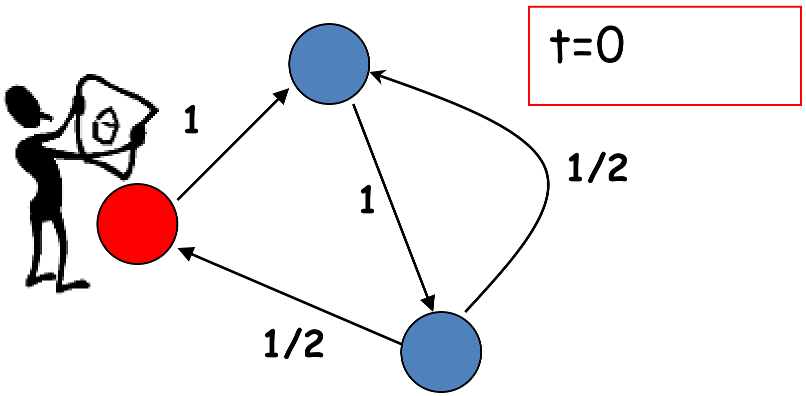


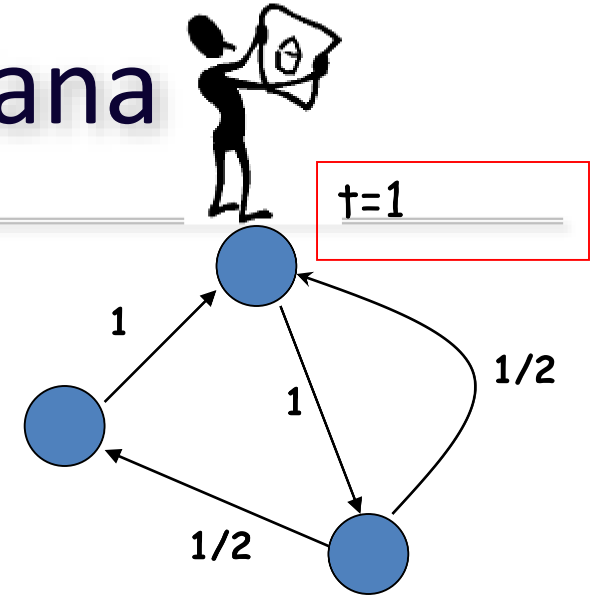


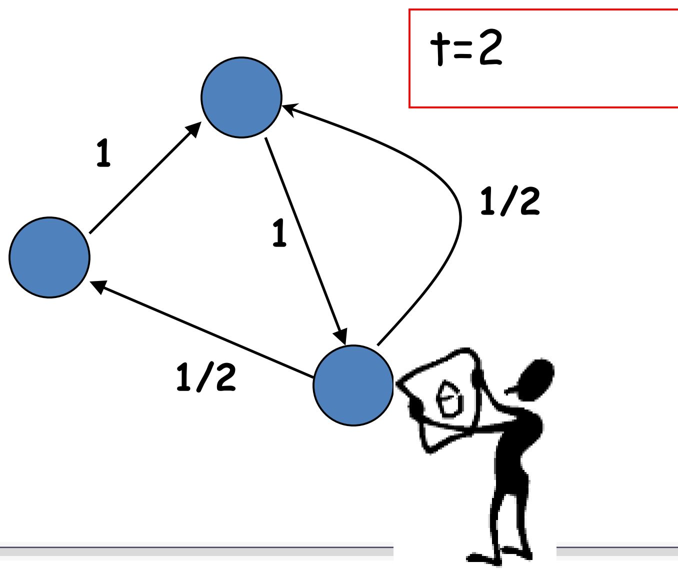
Gadījuma klejošana

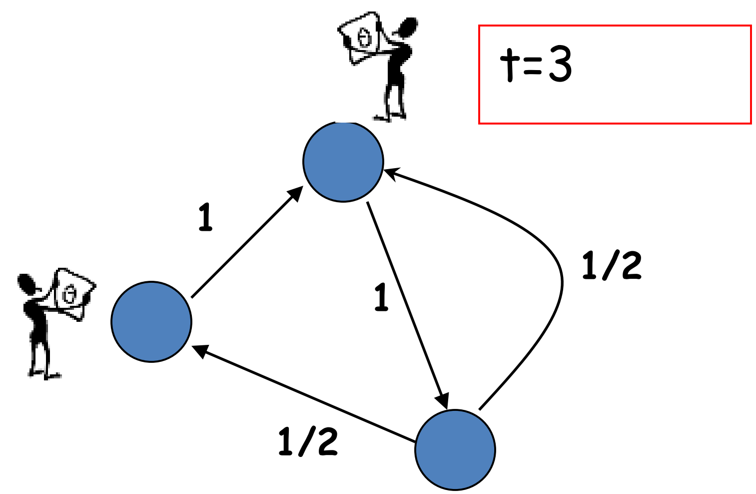


Gadījuma klejošana









Varbūtību sadalījums

- $x_t(i)$ - varbūtība, ka ceļotājs ir iekš grafa virsotnes *i* laika momentā *t*
- $x_{t+1}(i) = \sum_j (Varbūtība, ka\ esam\ virotnē\ j) * \Pr[j \to i] =$
$$= \sum_j x_t(j) * P(j, i)$$
- $x_{t+1} = x_t P = x_{t-1} P * P = x_{t-2} P * P * P = \cdots = x_0 P^t$

- Kas notiek ar varbūtību sadalījumu, ja ceļotājs klejo apkārt ilgāku laika periodu?

Varbūtību sadalījums

- $$\pi = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n-1} =$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n-2} = \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n-3} = \cdots =$$

$$\begin{pmatrix}0.2\\0.4\\0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n-k} = \begin{pmatrix}0.2\\0.4\\0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^{n-k-1} = \begin{pmatrix}0.2\\0.4\\0.4\end{pmatrix}$$

Kas ir stacionārais sadalījums?
Intuitīvi un matemātiski

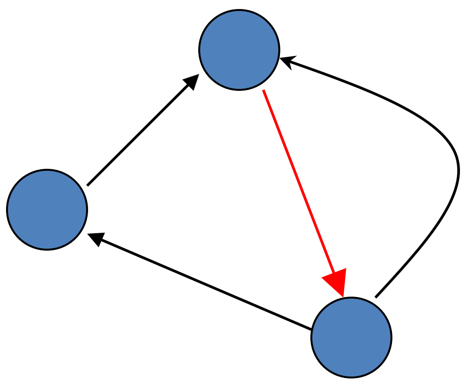
- Stacionārais sadalījums kādai no virsotnēm ir saistīts ar laika daudzumu, ko klejotājs pavada viesojoties šajā virsotnē.

Kas ir stacionārais sadalījums? Intuitīvi un matemātiski

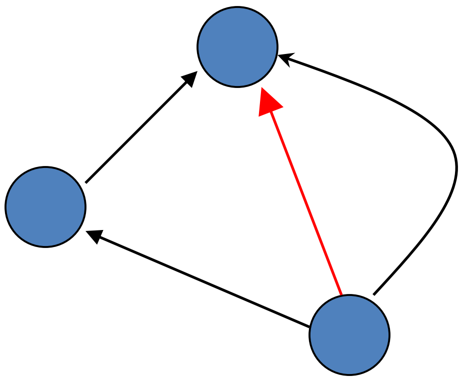
- Stacionārais sadalījums kādai no virsotnēm ir saistīts ar laika daudzumu, ko klejotājs pavada viesojoties šajā virsotnē.
- Stacionārajam sadalījumam v_0 izpildās: $v_0 = v_0 P$
- Stacionārais sadalījums ir pāreju matricas kreisais īpašvektors ar īpašvērtību 1!
- Ergodiskām Markova ķēdēm stacionārais sadalījums nav atkarīgs no sākuma sadalījuma!
- Markova ķēdes konverģences laiks uz stactionāro sadlījumu ir atkarīgs no tās otrās lielākās īpašvērtības.

Ergodiska Markova ķēde

- Nereducējamība: no katras uz katru virsotni ir ceļš.



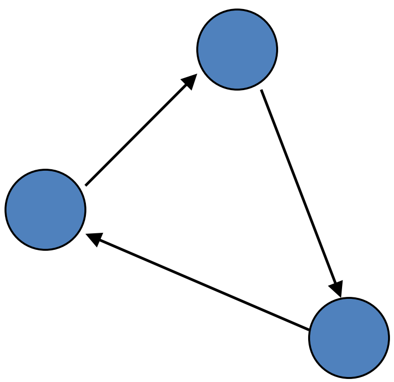
Nereducējama



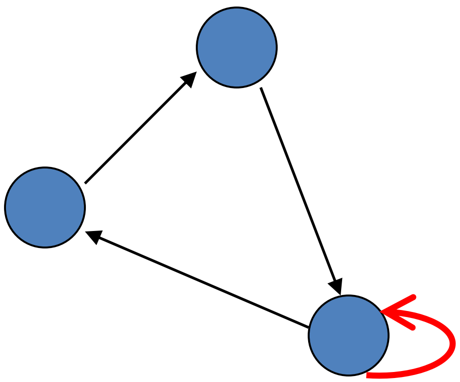
Nav nereducējama

Ergodiska Markova ķēde

- Aperiodiskums: LKD no visiem ciklu garumiem ir *1.* LKD tiek saukts arī par periodu.



Periods ir 3



Aperiodisks

Perron-Frobenius teorēma

- Ja Markova ķēde ir ergodiska (nereducējama + aperiodiska) tad pāreju matricas lielākā īpašvērtība ir vienāda ar **1** un visas citas īpašvērtības ir strikti mazākas par **1**.
  - Pieņemsim, ka P īpašvērtības ir $\{\sigma_i | \ i = 0 : n - 1\}$ sakārtotas nedilstošā secībā.
  - $\sigma_0 = 1 > \sigma_1 > \sigma_2 \geq \cdots >= \sigma_n$

- Šī teorēma ļauj secināt, ka katrai ergodiskai Markova ķēdei eksistē unikāls stacionārais sadalījums.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

PageRank (Larry Page & Sergey Brin, 1998)

- Tīmekļa vietne ir svarīga, ja citās svarīgas lapās ir saites uz to.
- Intuitīvi varam izvest vietnes svarīguma formulu:
  $v(i) = \sum_{j \to i} \frac{v(j)}{\deg^{\text{out}}(j)}$
- Izrādās, ka v ir tīmekļa stacionārais sadalījums.
- Perron-Frobenius teorēma ir spēkā tikai ergodiskām Markova ķēdēm, tādēļ ļaujam ar mazu varbūtību ***c*** nokļūt jebkurā citā vietnē.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

PageRank (Larry Page & Sergey Brin, 1998)

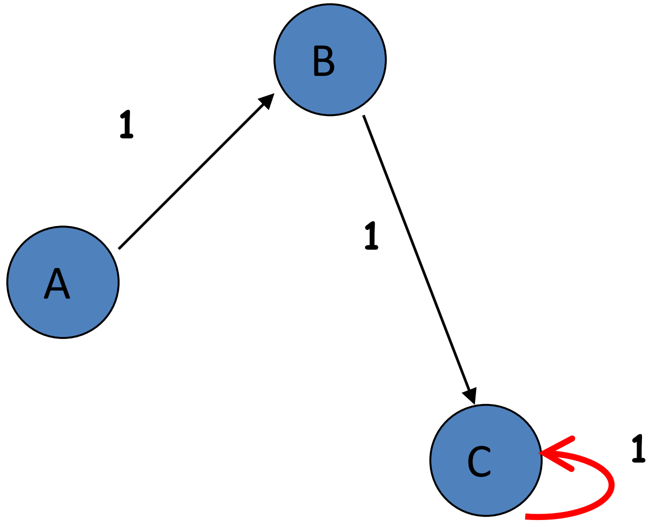
- Jebkurā laika solī klejotājs no kādas vietnes:
  - nokļūst jebkurā citā vietnē (teleportējas) ar varbūtību ***c***;
  - aiziet uz kādu no tās kaimiņu vietnēm ar kopējo varbūtību ***1-c***.
- Jaunā Markova ķēde: $\tilde{P} = (1-c)P + cU$, kur $\forall i,j$: $U_{i,j} = \frac{1}{n}$
- Ir pierādīts, ka $\tilde{P}$ otrā lielākā īpašvērtība ir $\leq\ (1-c)$, tādēļ PageRank rēķināšana ātri konverģē.
- PageRank ir vektors: $\mathbf{v} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{c})\boldsymbol{vP} + \boldsymbol{cr}$, kur r ir vienmērīgs sadalījums pa visām tīmekļa vietnēm.

Absorbējošas Markova ķēdes

- Absorbējošs stāvoklis ir tāds stāvoklis, no kura nevar izkļūt
- Par absorbējošu sauc tādu Markova ķēdi, kurā no katra stāvokļa var sasniegt kādu absorbējošu stāvokli

Markova ķēde:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Fundamentālā matrica

- Absorbējošai Markova ķēdei varam pārsaukt stāvokļus tā, lai pāreju matrica būtu šādā formā:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

- Par fundamentālo matricu sauc matricu:

$$N = (I - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

- Sagaidāmais vidējais soļu skaits, kad klejotājs nonāks kādā no absorbējošām virsotnēm ir:

$$t = N * \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Klejošanas algoritms

- 1) Setup(P) – izvēlas virsotni no stacionārā sadalījuma π.
- 2) Check(M) – pārbauda vai izvēlēta virsotne ir iekrāsota – ja ir iekrāsota, beidzam darbu.
- 3) Update(P) – veic vienu soli izmantojot Markova ķēdi P un atgriežas uz 2. soli.

Klejošanas algoritms

- 1) Setup(P) – izveidojam superpozīciju $|\pi\rangle \coloneqq \sum_{x\in M}\sqrt{\pi_x}|x\rangle$
- 2) Check(M) – pārvērš stāvokli $|x\rangle|b\rangle$ par $|x\rangle|b\rangle$, ja $x \notin M$, bet par $|x\rangle|1-b\rangle$, ja $x \in M$
- 3) Update(P) – *quantum walk operator* $W(P) \coloneqq V(P)^T SHIFT\, V(P) \cdot ref_\chi$, kur $V(P)|x\rangle|0\rangle \coloneqq |x\rangle|p_x\rangle \coloneqq |x\rangle \sum_{y\in G}\sqrt{P_{x,y}}|y\rangle$

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Elementu meklēšana

- M – kopa ar grafa virsotnēm, kuras ir marķētas.
- P' - absorbējoša ķēde; $D(P) := \sqrt{P \cdot P^T}$; v'_k un λ'_k matricas $D(P')$ īpašvektori un īpašvērtības nedilstošā secībā; p_m - varbūtība izvilkt marķētu virsotni no P stacionārā sadalījuma π; $|U\rangle := \frac{1}{\sqrt{1-p_m}} \sum_{x \notin M} \sqrt{\pi_x} |x\rangle$
- Pēc cik soļiem ar Markova ķēdi P tiks atrasta marķēta virsotne?
- Sagaidāmais soļu skaits: $HT(P, M) = \sum_{k=1}^{n-|M|} \frac{\left|\left\langle v'_k \middle| U \right\rangle\right|^2}{1-\lambda'_k}$

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Elementu meklēšana - kvantiski

- $P(s) \coloneqq (1-s)P + sP'$ - interpolētā ķēde.
- Pēc cik soļiem ar Markova ķēdi P tiks atrasta marķēta virsotne?
- Sagaidāmais soļu skaits ir kvadrātsakne no:
- $HT^{+}(P,M) \coloneqq \lim_{s\to 1} HT(s)$, kur
- $HT(s) \coloneqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left|\left\langle v_k(s) \middle| U \right\rangle\right|^2}{1-\lambda_k(s)}$
- Kad $|M| = 1$, tad $HT^{+}(P,M) = HT(P,M)$, neskaidrība ir ar gadījumu, kad $|M| > 1$

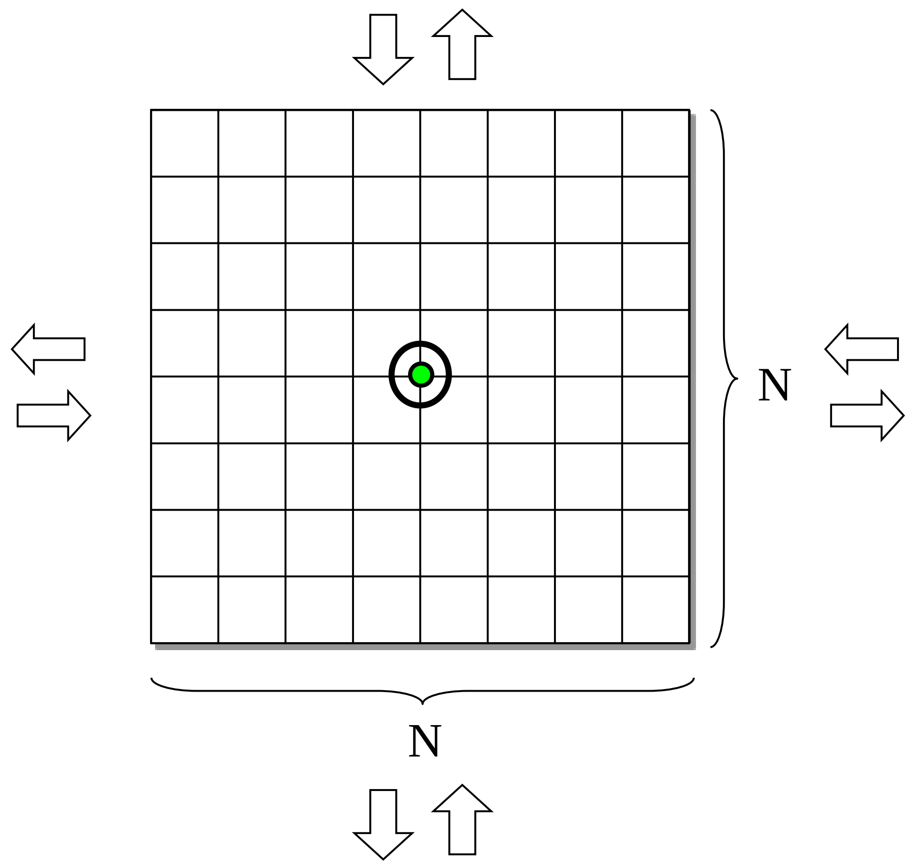
LATVIJAS UNIVERSITATE

Kvantu klejošana patvaļīgā grafā

- Pierādīts, ka patvaļīgam grafam kvantu klejošana no klasiskās klejošanas neatpaliek vairāk kā par lielumu, ko sauc par spektrālo atstarpi (*spectral gap*).
- $HT^{+}(P, M) \leq \frac{HT(P,M)}{1-\lambda_{n-1}}$
- Var atrast piemērus, kur šī atstarpe ir bezgalīga.

Kvantu klejošana uz plaknes

- Kāda ir atšķirība starp $HT^{+}(P,M)$ un $HT(P,M)$, kad meklēšana notiek uz 2d režģa?
- Pagaidām ir atrasti gadījumi, kad $\frac{HT^{+}(P,M)}{HT(P,M)} = O(N^2)$ - kvantiski tad nav paātrinājuma



PALDIES PAR UZMANĪBU!

LATVIJAS UNIVERSITĀTE