Kvantu klejošanas ierobežojumi

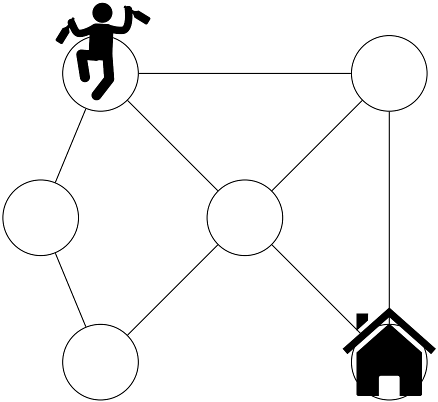
Doktorants: Jevgēnijs Vihrovs

Darba vadītājs: LU prof., Dr. dat. Andris Ambainis

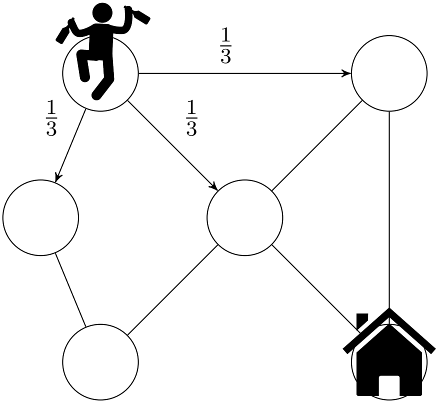
Latvijas Universitāte
Datorikas fakultāte

2017. gada 12. aprīlī

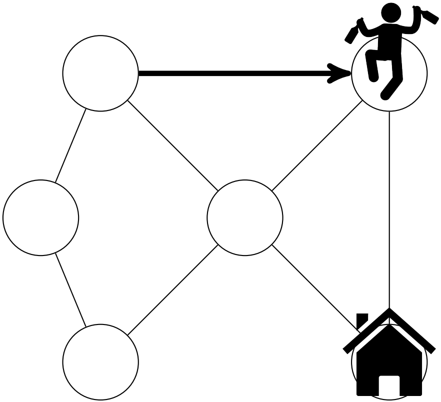
Klejošana



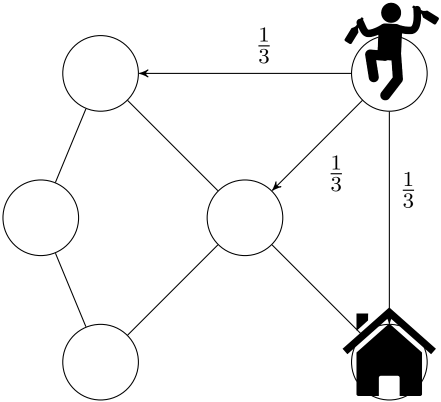
Klejošana



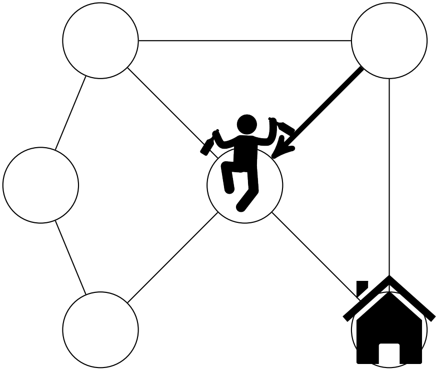
Klejošana



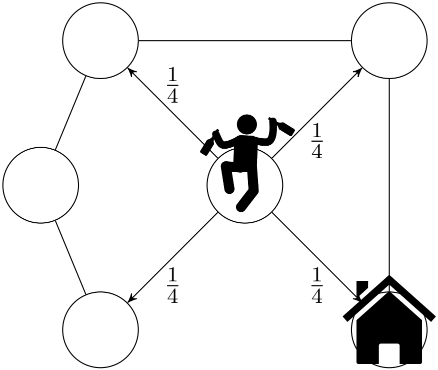
Klejošana



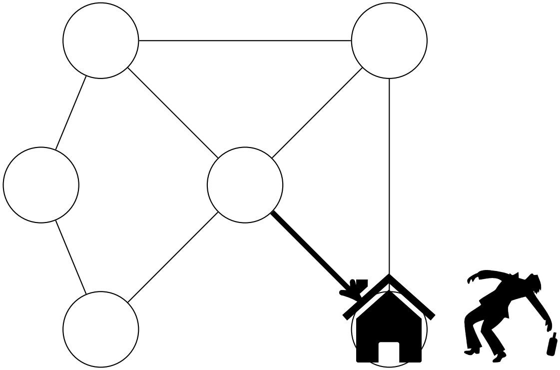
Klejošana



Klejošana



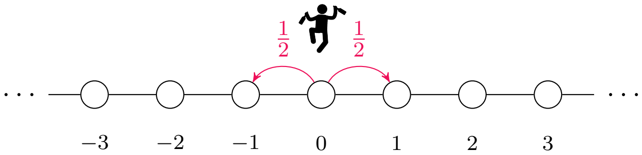
Klejošana



Pielietojumi

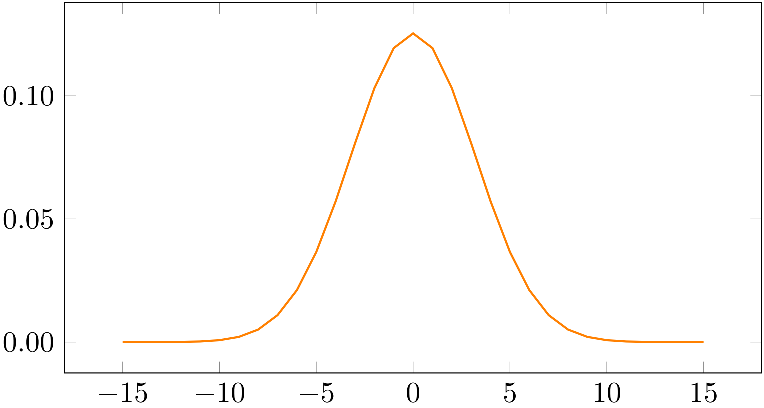
- Modelē fizikālās sistēmas.
- Algoritmi, piemēram:
    - Atrast ceļu no punkta A līdz punktam B, kad grafs ir ļoti liels, bet atmiņas maz.
    - Apstaigāt grafu G, nonākot katrā virsotnē ar konstantu varbūtību.
- Ekonomika, ģenētika, attēlu apstrāde, psiholoģija, ...

Varbūtiskā klejošana



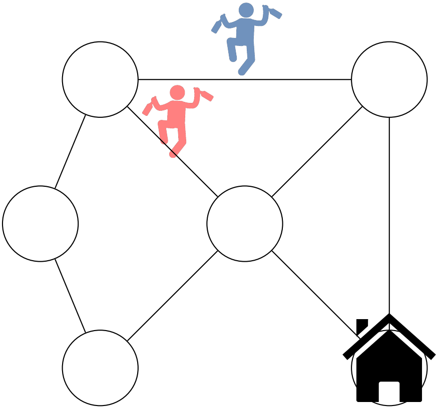
Atrašanās varbūtība pēc 40 soļiem

- Lai nokļūtu pozīcijā T, vajadzīgs aptuveni T^2 soļu.



Kvantu klejošana

- Klejotājs – fizikāla daļiņa, kas atrodas superpozīcijā grafā.



Kvantu klejošana

- Katrai škautnei $u \to v$ izveido stāvokli $|uv\rangle$.
- Vienu kvantu stāvokli var aprakstīt ar

$$|\psi\rangle = \sum_{u \to v} \alpha_{uv} \, |uv\rangle \, .$$

- α_{uv} ir kompleksi skaitļi, citādi pieraksta kā $\alpha_{uv} = \langle uv|\psi\rangle$. Ja

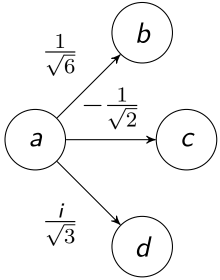
$$\sum_{u \to v} |\alpha_{uv}|^2 = 1,$$

tad daļiņa atrodas šķautnē $u \to v$ ar varbūtību $|\alpha_{uv}|^2$.

Kvantu klejošana

- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|ab\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|ac\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|ad\rangle.$
- Daļiņa atrodas:

$$a \to b \text{ ar varb. } 1/6;$$
$$a \to c \text{ ar varb. } 1/2;$$
$$a \to d \text{ ar varb. } 1/3.$$



Kvantu klejošana

- Viens klejošanas solis – unitāra transformācija U.
- Parasti $U = SC$, kur
  - C – monētas mešana;
  - S – daļiņas pārvietošana.
- Procedūra:
  1. sagatavo kvantu stāvokli $|\psi_0\rangle$;
  2. izpilda t soļus, iegūst $|\psi_t\rangle = U^t |\psi_0\rangle$;
  3. nomēra kvantu stāvokli; ar varbūtību $|\langle uv|\psi_t\rangle|^2$ daļiņa atradīsies šķautnē $u \to v$.

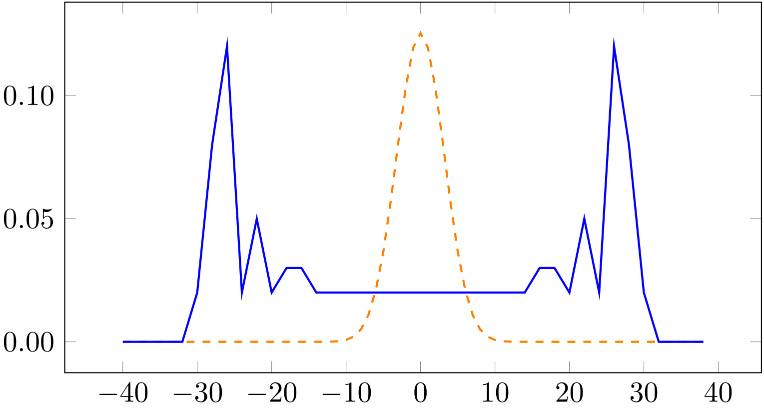
Klejošana uz taisnes

- $U = SC$, kur C – monētas mešana, S – pārvietošanās.
  - $C|x,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$
    $C|x,1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$
  - $S|x,0\rangle = |x-1,0\rangle$
    $S|x,1\rangle = |x+1,1\rangle$

- Sāk no stāvokļa $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$.

Kvantu klejošana

- Lai nokļūtu pozīcijā T, vajadzīgs aptuveni T soļu.



Pielietojumi

- Modelē kvantu fizikālas sistēmas.
- Pamats lielai daļai kvantu algoritmu (daudz ātrāki par klasiskajiem!):
  - Meklēšana datubāzē, Element Distinctness, Triangle Finding, ...

Vai kvantu klejošana vienmēr ir ātrāka?

Pielietojumi

- Modelē kvantu fizikālas sistēmas.
- Pamats lielai daļai kvantu algoritmu (daudz ātrāki par klasiskajiem!):
  - Meklēšana datubāzē, Element Distinctness, Triangle Finding, ...

Vai kvantu klejošana vienmēr ir ātrāka? **NĒ!**

Lokalizācija

- Fenomēns, kad daļiņa iesprūst sākumstāvoklī $|\psi_0\rangle$ un klejošana nenotiek.

$$U^t |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle .$$

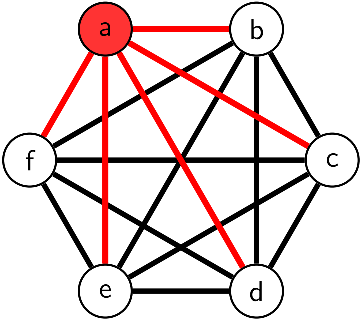
- Grovera kvantu klejošana:
  - C ir Grovera transformācija. [Grover, 1996]
  - $S|uv\rangle = -|vu\rangle$.

Piemērs: lokalizācija

- Pilnais grafs K_N.
- Sākot no stāvokļa

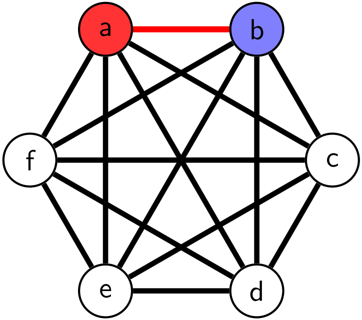
$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{a \to v} |av\rangle \,,$$

notiek klejošana pa visu grafu.



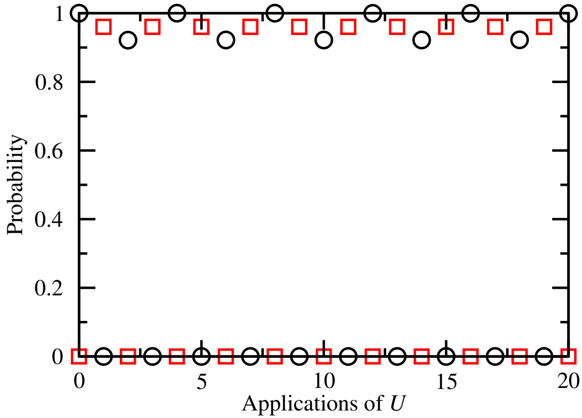
Piemērs: lokalizācija

- Pilnais grafs K_N.
- Sākot no $|\psi_0\rangle = |ab\rangle$, stāvoklis lokalizējas.



Lokalizācija

- Klejošana K_{16}, melnie riņķi apzīmē varbūtību atrasties $|ab\rangle$, sarkanie kvadrāti – varbūtību atrasties $|ba\rangle$.

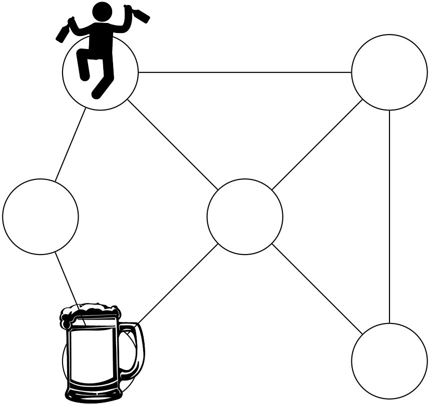


Lokalizācija: rezultāti

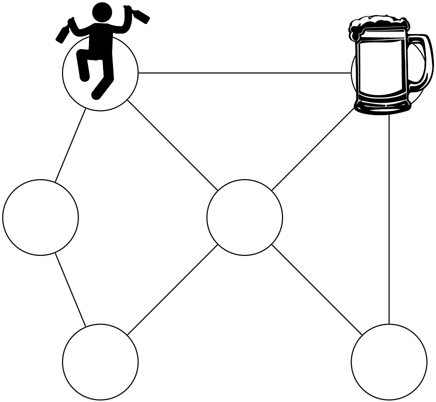
Oscillatory localization of quantum walks analyzed by classical electric circuits, A. Ambainis, K. Prūsis, J. Vihrovs, T.G. Wong., *Physical Review A 94 (6)*.

- Lokalizācija uz šķautnes starp divām virsotnēm *a* un *b* notiek:
  - Ja grafā ir daudz ceļu starp *a* un *b*.
  - Ja atbilstošajā elektriskajā tīklā starp *a* uz *b* ir maza pretestība.
- Šīs īpašības izpildās daudziem plaši pētitiem grafiem:
  - Visi augstās virsotņu pakāpes šķautņu-tranzitīvie grafi;
  - Būla hiperkubs;
  - Pilnais grafs;
  - *d*-dimensiju režģis.
- Atrasti arī kritēriji vispārīgiem sākumstāvokļiem $|\psi_0\rangle$.

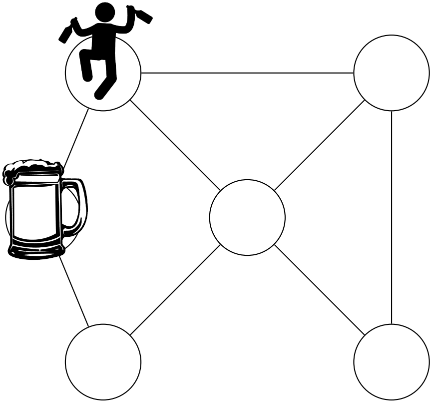
Meklēšana



Meklēšana



Meklēšana



Meklēšana

- Orākuls Q:
  $Q|uv\rangle = |uv\rangle$, ja u nav iezīmēta;
  $Q|uv\rangle = -|uv\rangle$, ja u ir iezīmēta.

- Vienā meklēšanas solī pielieto transformāciju $U = SCQ$.

- Algoritms:
  1. sagatavo vienmērīgo superpozīciju $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{uv} |uv\rangle$;
  2. izpilda t soļus, iegūst $|\psi_t\rangle = U^t |\psi_0\rangle$;
  3. nomēra kvantu stāvokli; iegūst mērījumu $u \to v$, atgriež u.

  Izvēlas tādu t, lai pēc t soļiem u būtu iezīmēta ar lielu varbūtību.

Meklēšana: piemērs

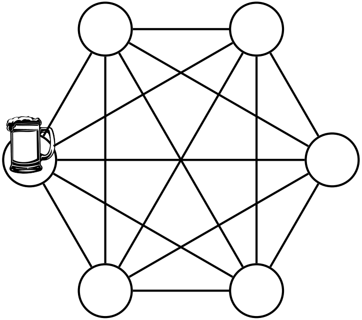
Pilnais grafs K_N.

Iezīmēta 1 virsotne.

- Klasiski: aptuveni N soļi.
- Kvantiski: aptuveni $\sqrt{N}$ soļi.

Iezīmēta 2 virsotnes.

- Klasiski: aptuveni $N/2$ soļi.
- Kvantiski: **?**



Meklēšana: piemērs

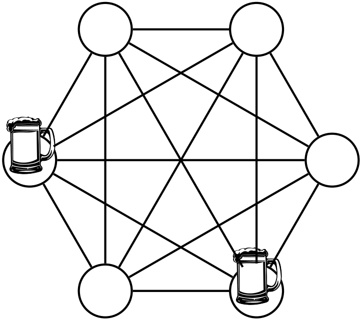
Pilnais grafs K_N.

Iezīmēta 1 virsotne.

- Klasiski: aptuveni N soļi.
- Kvantiski: aptuveni $\sqrt{N}$ soļi.

Iezīmēta 2 virsotnes.

- Klasiski: aptuveni $N/2$ soļi.
- Kvantiski: **nav progresa**.

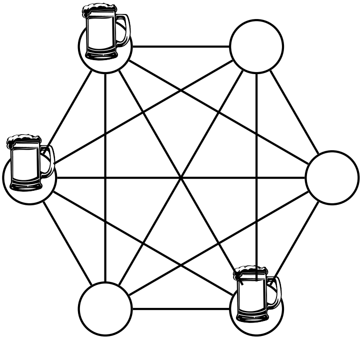


Meklēšana: piemērs

Pilnais grafs K_N.

Iezīmētas m virsotnes, kur m ir mazs.

- Klasiski: aptuveni N/m soļi.
- Kvantiski: nav progresa.



Meklēšana: rezultāti

Stationary states in quantum walk search, K. Prūsis, J. Vihrovs, T.G. Wong, *Physical Review A 94 (3)*.

- Pieņēmam, ka iezīmēto virsotņu ir maz salīdzinājumā ar N. Tad, ja izpildās viens no:
  - iezīmētās virsotnes veido *saistītu nedivdaļīgu* apakšgrafu;
  - iezīmētās virsotnes veido *saistītu divdaļīgu* apakšgrafu un abām daļām ir vienāds šķautņu skaits, kas iet uz neiezīmētajām virsotnēm,

  tad meklēšanai nav progresa.
- Pilns raksturojums stacionārajām iezīmēto virsotņu konfigurācijām.

Paldies! 

Jautājumi?