Kvantu algoritmi izliektajai optimizācijai

Maģistra kursa darbs

Autors: Vladislavs Kļevickis, vk11152
Vadītājs: Jevgēnijs Vihrovs, Dr. Dat.

Izliektie orākuli

Darbā ir aplūkoti orākuli, kas atbild uz vaicājumiem par n-dimensionālām izliektām kopām:

- Piederības orākuls $\mathrm{MEM}(K)$ uz vaicājumu $y \in \mathbb{R}^n$ atbild, vai šis punkts pieder kopai K.
- Separācijas orākuls $\mathrm{SEP}(K)$ uz vaicājumu $y \in \mathbb{R}^n$ atbild, vai y pieder K, un, ja nepieder, atgriež pārplakni, kas atdala y no K.
- Optimizācijas orākuls $\mathrm{OPT}(K)$ uz vaicājumu, kas ir vienības vektors $c \in \mathbb{R}^n$, atgriež punktu $y \in K$, kas maksimizē $c^T y$.

Visiem šiem orākuliem ir "vājas" versijas, kad atbilde var būt neprecīza. Piemēram, $\mathrm{MEM}_\varepsilon(K)$ var atbildēt, ka $y \in B(K, \varepsilon)$, kas nozīmē "y gandrīz pieder K".

Tiek pētīts jautājums: ar cik orākula X vaicājumiem var implementēt vienu orākula Y vaicājumu?

Sarežģītības novērtējumi kvantu orākuliem

$$\mathrm{MEM} \xrightarrow{\tilde{\Theta}(1)} \mathrm{SEP} \xrightarrow[\Omega(\sqrt{n})]{\tilde{O}(n)} \mathrm{OPT},$$

pie nosacījumiem, ka:

- $K \subseteq \mathbb{R}^n$,
- ir zināms $R \in \mathbb{Q}^+$, ka $K \subseteq B(0, R)$,
- ir zināms $a_0 \in \mathbb{Q}^n$ un $r \in \mathbb{Q}^+$, ka $B(a_0, r) \subseteq K$,
- R, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\varepsilon}$ ir $poly(n)$.

Labākais $\mathrm{SEP} \to \mathrm{OPT}$ augšējais novērtējums, kas ir atkarīgs no visiem parametriem:

$$O\left(n \log\left(\frac{nR}{r\varepsilon}\right)\right).$$

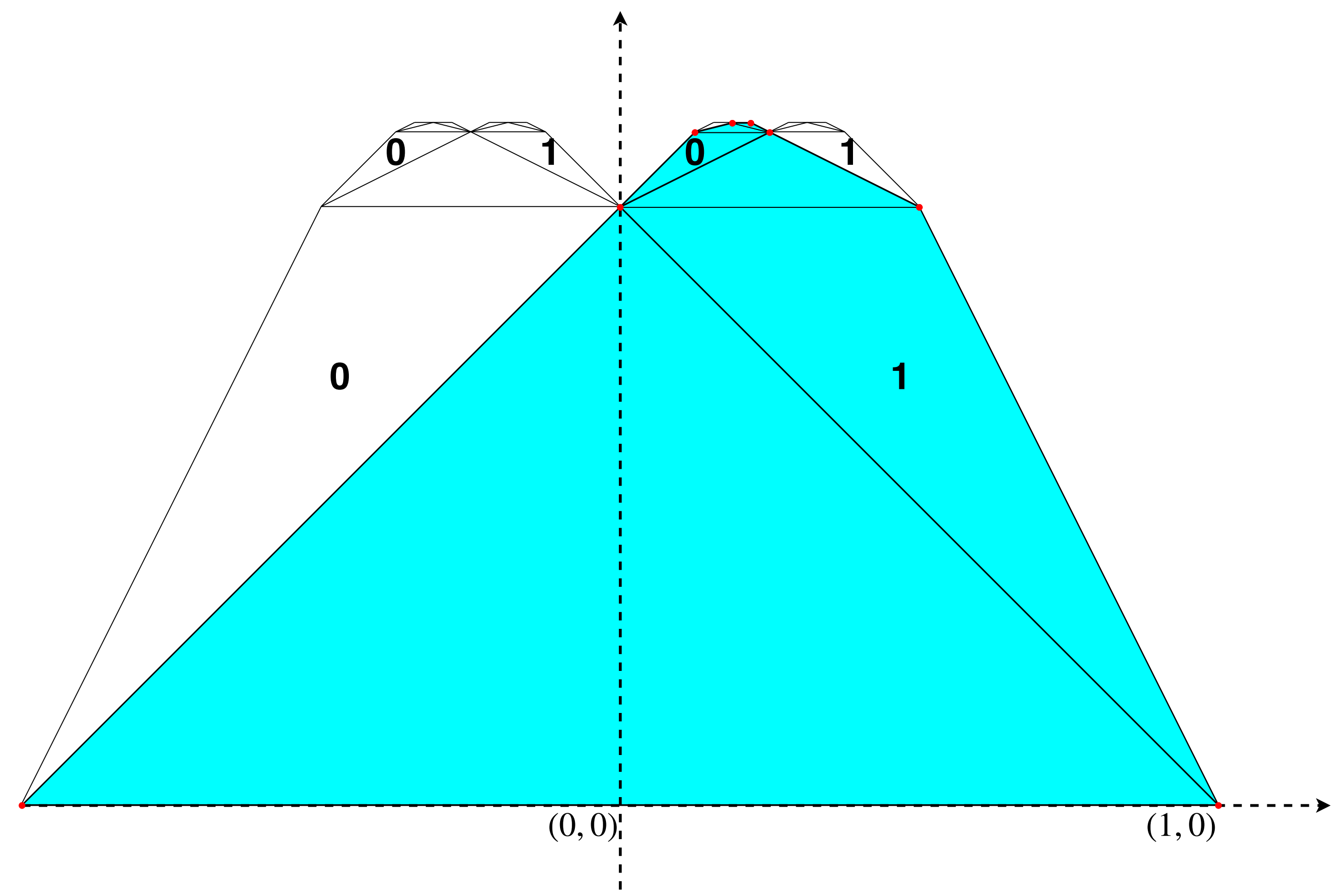
Optimālā $\mathrm{SEP} \to \mathrm{OPT}$ sarežģītība nav zināma.

Rezultāti

Galvenais rezultāts ir optimālais kvantu apakšējais novērtējums $\Omega\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ uzdevumam $\mathrm{SEP} \to \mathrm{OPT}_\varepsilon$ ar konstantiem n, R un r, ja ir dots $a_0 \in K$.

Pierādījuma ideja

Redukcija no uzdevuma: atrast $z \in \{0, 1\}^m$ ar "pirmās atšķirības" orākulu, kur m ir $\Theta\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Uzbūvējam divdimensionālu kopu K_z, kuru nosaka z.



Att.: Piemērs kopai K_z, kad $z = (1, 0, 1)$

- SEP vaicājumu var implementēt ar vienu pirmās atšķirības vaicājumu.
- OPT_ε, kas maksimizē no sākuma otro koordinātu un pēc tam pirmo, ļauj atrast z.

Lai atrast z, ir nepieciešami $\Omega(m)$ pirmās atšķirības vaicājumi, tātad $\mathrm{SEP} \to \mathrm{OPT}_\varepsilon$ ir $\Omega(\log \frac{1}{\varepsilon})$.