LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

Datorikas Fakultāte

Precīzi kvantu algoritmi izmantojot 1-kvantu-vaicājuma izsaukumus

Autors: **Zigmārs Rupenheits**
Epasts: **zr11002@lu.lv**
Darba vadītājs: **prof. Dr.sc.comp. Juris Smotrovs**

Motivācija un ievads

- 1985. gadā [Deutsch (1985)] – pirmais kvantiskais XOR aprēķins ar uzlabojumu pār klasisko skaitļošanu (ar kļūdas varbūtību $\frac{1}{2}$);
- 1997. gadā [Cleve etal. (1997)] – uzlabo D. Deutsch rezultātu un iegūst precīzo kvantu algoritmu, kas aprēķina XOR ar vienu vaicājumu;
- 2011. gadā [Montanaro etal. (2011)] parāda, ka dažas Būla funkcijas nav iespējams aprēķināt ar optimālu vaicājumu skaitu, izmantojot XOR triku;
- 2013. gadā Ambainis, Iraids, Smotrovs [Ambainis etal. (2013)] parāda jauna paņēmiena pielietojumu divu simetrisku Būla funkciju precīzajam kvantu algoritmam ar optimālu vaicājumu skaitu;
- Līdz šim nav vispārināta metode citiem kvantu algoritmiem, kas parādījās Ambainis etal. (2013) publikācijā

Mērķi

- Veikt plašāku literatūras pārskatu
- Veikt EXACT un THRESHOLD analīzi, izceļot pamatidejas, ko varētu tiem vispārināt
- Pietuvoties vispārinājumam, izanalizējot viena kvantu vaicājuma soli
- Uzzināt, vai ir iespējami citi algoritmi, balstīti uz tādu pašu principu

Vajadzīgās priekšzināšanas

Kvantu stāvokļi

- Ar $|1\rangle, |2\rangle, \ldots |n\rangle$ apzīmējam **bāzes stāvokļus**.
- Lineāru transformāciju (matricu) U sauc par **unitāru**, ja $UU^\dagger = I$, kur $U^\dagger$ ir Ermita saistītā transformācija.
- Par kvantu vaicājumu Q sauksim $Q|i\rangle = (-1)^{x_i}|i\rangle$, kur x_i ir ieejas vārda i-tais bits.

Būla funkcijas

- Parasti (pilnīgi definēta) **Būla funkcija** f tiek definēta kā $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$EXACT_k^n$ [Ambainis etal. (2013)]

$$EXACT_k^n(x) = \begin{cases} 1, \text{ja } |x| = k \\ 0, \text{citādi} \end{cases}$$

Kā izrādās, atrisinot speciālgadījumu $EXACT_m^{2m}$, pārējos var reducēt uz to.

$$|0\rangle \xrightarrow{U_1} \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{\sqrt{2m}}|i\rangle \xrightarrow{Q} \sum_{i=1}^{2m} \frac{\hat{x}_i}{\sqrt{2m}}|i\rangle$$

Visiem $i \in [2m]$:

$$U_2|i\rangle = \sum_{j>i} \frac{1}{\sqrt{2m}}|i,j\rangle - \sum_{j<i} \frac{1}{\sqrt{2m}}|j,i\rangle + \frac{1}{\sqrt{2m}}|0\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{\hat{x}_i}{\sqrt{2m}}|i\rangle \xrightarrow{U_2} \sum_{i=1}^{2m} \frac{\hat{x}_i}{2m}|0\rangle + \sum_{i<j} \frac{\hat{x}_i - \hat{x}_j}{2m}|i,j\rangle$$

Algoritmā, kā publikācijā aprakstīts, tiek darīts sekojoši:

1. ja tiek nomērīts $|0\rangle$, tad $\sum_{i=1}^{2m} \hat{x}_i \neq 0$ jeb $|\{i|\hat{x}_i = 1\}| \neq |\{i|\hat{x}_i = -1\}|$;
2. ja tiek nomērīts $|i,j\rangle$, tad $\hat{x}_i \neq \hat{x}_j$.

Un abos gadījumos tiek iegūta informācija, kas ir derīga, lai rekursīvi reducētu problēmu uz tās stingri mazāku gadījumu:

1. $EXACT_m^{2m} = 0$, jo bitu vērtību sadalījums nav precīzi uz pusēm $\sum_{i:x_i=0} \hat{x}_i \neq -\sum_{i:x_i=1} \hat{x}_i$;
2. $EXACT_m^{2m}(x) = EXACT_{m-1}^{2m-2}(x \backslash \{x_i, x_j\})$.

Pirmie rezultāti

- Pārskatīta plašāka literatūra par precīziem kvantu algoritmiem
- Analizēti publicēto optimālo kvantu vaicājuma algoritmi Būla funkcijām $EXACT_k^n(x)$ un $THRESHOLD_k^n(x)$
- Uzsākta vispārinātu paņēmienu nosacījumu formulēšana (kā vairākargumentu 1. kārtas polinomu komplekti ar normētības un citiem papildnosacījumiem)

Atsauces

Ambainis, A., Iraids, J., and Smotrovs, J. (2013). Exact quantum query complexity of EXACT and THRESHOLD. *Lecture Notes in Computer Science*, 10139 LNCS:243–255.

Cleve, R., Ekert, A., Macchiavello, C., and Mosca, M. (1997). Quantum Algorithms Revisited. pages 339–354.

Deutsch, D. (1985). Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 400:97–117.

Montanaro, A., Jozsa, R., and Mitchison, G. (2011). On exact quantum query complexity. *Algorithmica*, 71:775–796.