Kvantu nelokalitāte un kvantu spēles

Agnis Škuškovniks

Latvijas Universitāte
Datorikas fakultāte

2012. gada 10. maijā

ESF EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS
EIROPAS SAVIENĪBA
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Eiropas sociālā fonda projekts „Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku" Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Kas ir spēļu teorija?

- Spēļu teorija pēta vairāku spēlētāju lēmumu pieņemšanas procesu, kurā spēlētājiem jāizdara izvēles, kas potenciāli ietekmē citus spēlētājus
  - *Antoine Cournot (in 1838); John von Neumann (in 1928); John Nash (in 1950)*

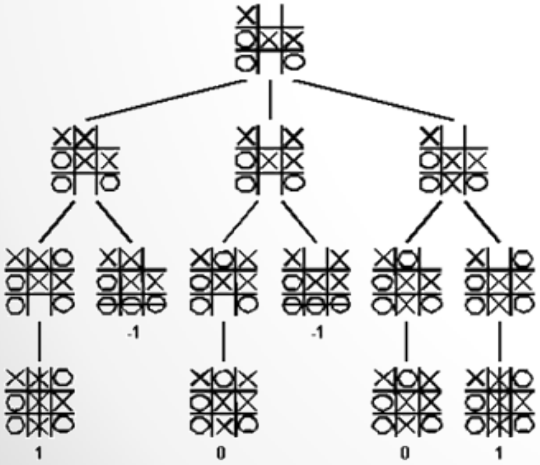
"Kvalitāte-pirkums" spēle

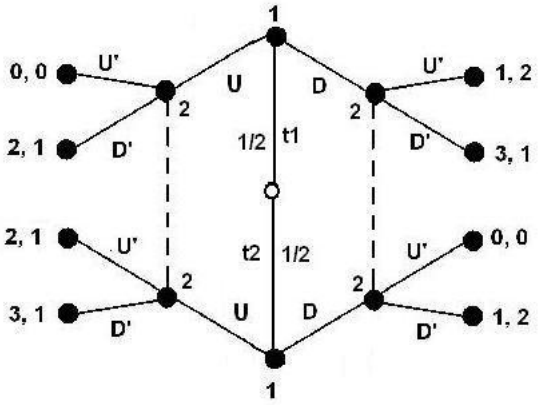
	pirkt	nepirkt
augsta	(2; 2)	(0;1)
zema	(1; 0)	(1;1)

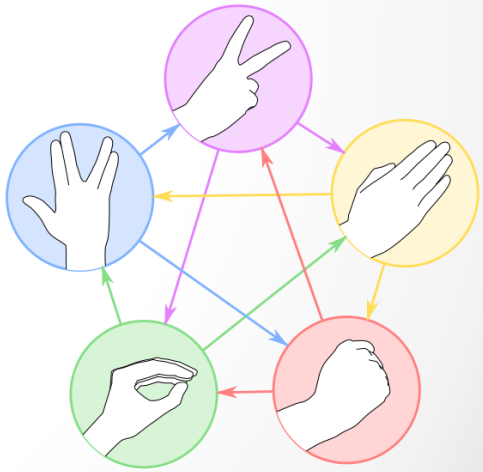
"Battle of sexes" spēle

	opera	futbols
opera	(3; 2)	(0;0)
futbols	(0; 0)	(2;3)

Rock-Paper-Scisors-Lizard-Spock







Kas ir kvantu spēļu teorija?

- Kvantu spēļu teorija ir klasiskās spēļu teorijas paplašinājums, izmantojot kvantu fizikas parādības
- 3 atšķirības:
  - Sākuma stāvokļi ir sapīti (zināms, ka tas nedod papildus komunikācijas iespēju)
  - Sākuma stāvokļu superpozīcija
  - Stratēģiju pielietojums kā kvantu transformācija

Kvantu spēļu veidi

- **Nonlocal spēles**
  - Kvantu *nonlocality* un klasiskā "*hidden variable*" īpašību ilustrēšana; Bella teorēmas ilustrācija
- ***Stratēģisko spēļu kvantu analogi*** (normālformas spēles)
  - Esošu spēļu pārnešana kvantu pasaulē
- **Izvērstas formas spēles**
  - Dažādi izvērsti ierobežojumi spēlētāju darbībām

Balsošanas modelis

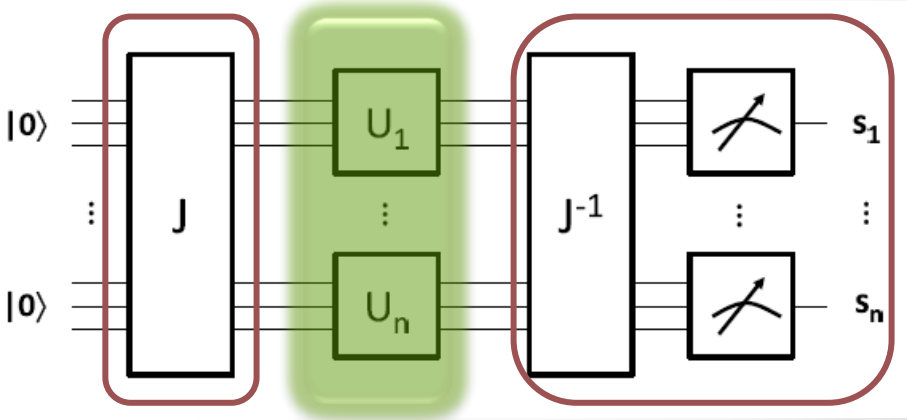
Dmitrija Kravčenko rezultāts

Vēlēšanu rezultātu ieguvuma matrica

matrica	P1	P2	P3	P4
Cilvēks – A3	0	0	**3**	**2**
Cilvēks – B2	0	**3**	0	**2**
Cilvēks – C1	**3**	0	0	**2**

- Klasiskais modelis
  - Spēlētājam "izdevīgi balsot par savu partiju" (Neša līdzsvars)
  - Rezultāts – 3 partiju neizšķirts
    → Spēlētāja ieguvums: 3*1/3=1

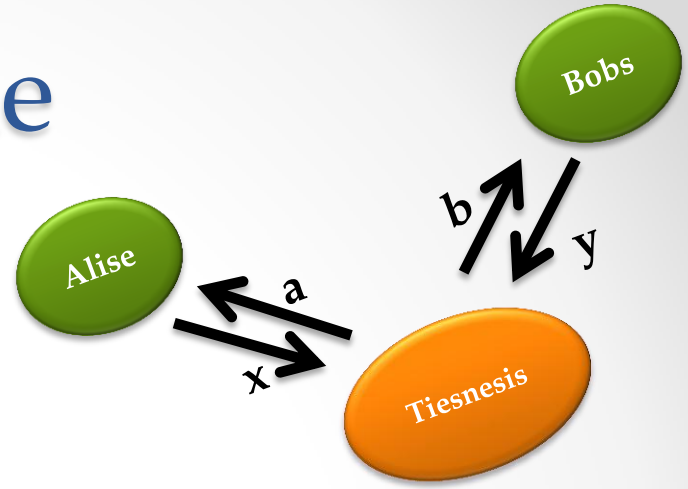
- Kvantu modelis
  - Spēles elementi tiek modificēti atbilstoši kvantu spēļu analīzes modelim
  - Spēlētājam pieejams sapīts kvantu bits
  - Rezultāts – Uzvar P4
    → Spēlētāja ieguvums: **2**



Nonlocal spēles

- Parāda klasiskās un kvantu fizikas atšķirības datorzinātniekiem *saprotamā* veidā
- Ilustrē Bella teorēmu
- Parasti kooperatīvas spēles, kur spēlētāji kopā spēlē pret tiesnesi
  - Spēlētājiem dota informācija no zināmas **ievada** kopas
  - Spēlētāji **izvada** atbildi (parasti bitu)
  - Mērķis – panākt ievada un izvada **korelāciju** (atbilstoši kādai iepriekš zināmai funkcijai)
  - Spēlētāji zin kā spēlē tiesnesis (t.i. Zin vērtēšanas algoritmu)
  - Spēlētāji pirms spēles drīkst komunicēt un vienoties par algoritmu
  - Kvantu modelī iegūstot augstāku rezultātu nekā klasiskajā, tiek ilustrēts Bella teorēmas rezultāts

CHSH spēle



- Ievaddati: **a,b** ∈{0,1}
- Izvaddati: **x,y** ∈{0,1}

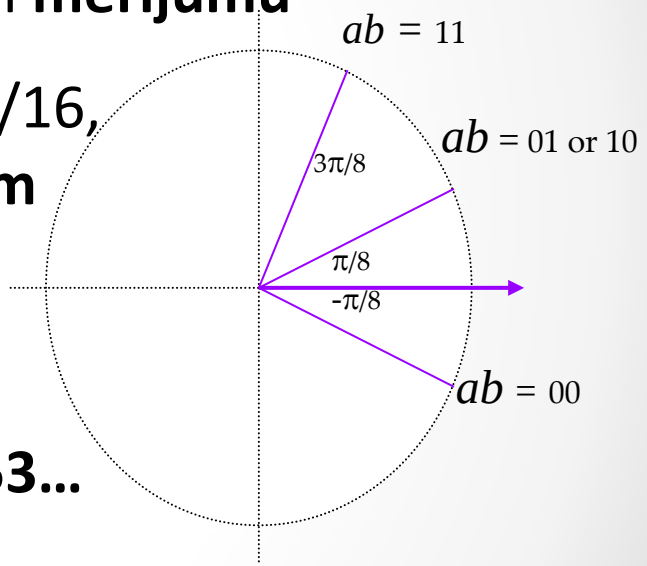
- Noteikumi:
  - Pēc ievaddatu saņemšanas komunikācija nedrīkst notikt
  - Spēlētāji uzvar,
    - Ja a=b=1, tad x⊕y=1
    - Ja a=0 vai b=0, tad x⊕y=0
- Klasiskā situācijā Pr[x⊕y = a∧b] ≤ 0.75

a b	x⊕y
00	0
01	0
10	0
11	1

- Bet, ja spēlētājiem pieejams sapīts stāvoklis $|00\rangle - |11\rangle$
  - Pr[x⊕y = a∧b] = $\cos^2(\pi/8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$ = **0.853…**

Kvantu CHSH stratēģija

- Alisei un Bobam pieejami sapīti kvantu biti $|\phi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$
- **Alise:** ja a = 0, tad rotācija pa leņķi $\theta_A = -\pi/16$, citādi rotācija pa leņķi $\theta_A = +3\pi/16$ un tad veicam **mērījumu**
- **Bobs**: ja b = 0, tad rotācija pa leņķi $\theta_B = -\pi/16$, tad rotācija pa leņķi $\theta_B = +3\pi/16$ un **mērām**



Uzvaras varbūtība:

$\Pr[a \oplus b = s \wedge t] = \cos^2(\pi/8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \mathbf{0.853\ldots}$

CHSH spēle «average case» vs «worst case»

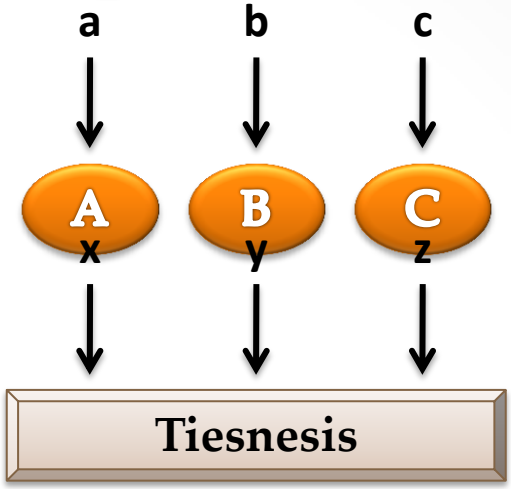
- **Klasiski:**
  - Labākā stratēģija x=0, y=0
  - Iespēja atbildēt pareizi 0.75
- **Ja nu, ieejas biti netiek padoti vienmērīgi?**
- Izmanto **varbūtisku** stratēģiju:
  - Labākā stratēģija: ar varbūtību 0.25 izvēlēties 1 no 4 stratēģijām
  - Iespēja atbildēt pareizi 0.75

a b	Pareizā Atbilde	x y	x⊕y	Atbilst
00	0	0 0	0	+
01	0	0 0	0	+
10	0	0 0	0	+
11	1	0 0	0	-

a b	Pareizā Atbilde	x=0 y=0			x=0 y=b			x=a y=0			x=a y=!b		
0 0	0	0 0	0	+	0 0	0	+	0 0	0	+	0 1	1	-
0 1	0	0 0	0	+	0 1	1	-	0 0	0	+	0 0	0	+
1 0	0	0 0	0	+	0 0	0	+	1 0	1	-	1 1	0	+
1 1	1	0 0	0	-	0 1	1	+	1 0	1	+	1 0	1	+

N spēlētāju AND spēle [nAND] (N=3)

- Ievaddati: **a,b,c** $\in\{0,1\}$
- Izvaddati: **x,y,z** $\in\{0,1\}$
- Spēlētājs uzvar
  - Ja a=b=c=1, tad $x\oplus y\oplus z=1$
  - ja citādi, tad $x\oplus y\oplus z=0$
- **Klasiski**:
  - Labākā stratēģija: {x=0, y=0, z=0}
  - $Pr[x\oplus y\oplus z = a\wedge b \wedge c] \leq 7/8$
- **Varbūtiski?**
- Iepriekš aprakstītā metode nederēs, jo
  - ir tikai 1 stratēģija kā iegūt 7/8;
  - citām stratēģijām max. 5/8



a b c	x⊕y⊕z
000	0
001	0
010	0
011	0
100	0
101	0
110	0
111	1

Klasiskā un Kvantu nAND (worst case)

- Klasiskās spēles vērtība ir: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{(2^{n-1} - 1) + (2^n - 1)} = \frac{2}{3}$

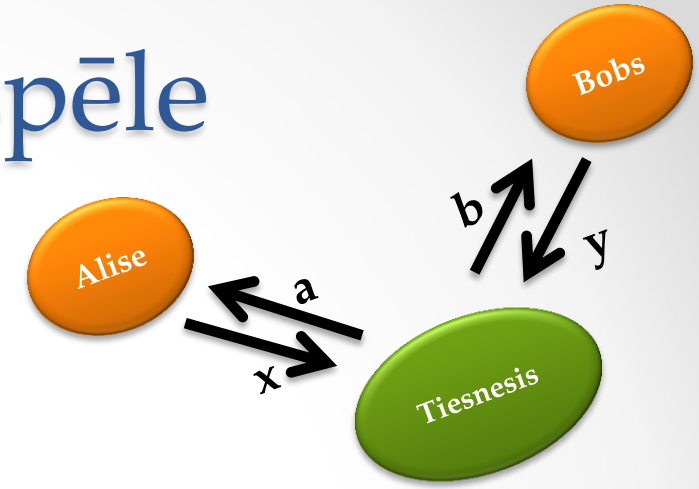
- Tika atrasta formula Pr(Uzvara)-Pr(Zaudējums) un novērtēta robeža:

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\substack{a_0,\dots a_n \in R^{0+} \\ \Sigma a_i = 1}} \max_{|x|=1} |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x - a_n| = \frac{1}{3} \Rightarrow \Pr(Uzvara) = \frac{2}{3}$$

Klasiskā un Kvantu nAND (average case)

- Pie fiksēta ieejas datu varbūtību sadalījuma:
  - Triviāla stratēģija – visi spēlētāji atbild "0"
  - Uzvar **n-1** no **n** gadījumos.

Equal-Equal spēle



- Ievaddati: **a,b** ∈{0, …, m}
- Izvaddati: **x,y** ∈{0,1}

- Noteikumi:
  - Pēc ievaddatu saņemšanas komunikācija nedrīkst notikt
  - Spēlētāji uzvar, ja (x=y)⇔(a=b)
- Average case: m>4: $p^{c}_{\text{win}} = p^{q}_{\text{win}} = \frac{m-1}{m}$
- Worst case: m=2i: $p^{classical}_{\text{win}} = p^{quantum}_{\text{win}} = \frac{2(m-1)}{3m-4}$

m=2i+i: $p^{c}_{\text{win}} = \frac{2m}{3m-1}$ un $\frac{2m}{3m-1} \leq p^{q}_{\text{win}} \leq \frac{2m(m-1)+1}{(3m-1)(m-1)}$

Paldies!

Jautājumi?